余イデアル部分代数を用いた $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の構成

筑波大学大学院 理工情報生命学術院 数理物質科学研究群
杉谷礼 (Rei SUGITANI) *

概要

近年，テンソル圏において通常の環論におけるそれを一般化する形で定義される単純代数の概念が注目されている．本講演では 1 の冪根における量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数の生成元と代数構造について説明する．さらにそれを用いた $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の構成例を紹介する．

1 導入

非退化なリボン構造をもつ有限テンソル圏はモジュラーテンソル圏と呼ばれる．モジュラーテンソル圏は，三次元閉多様体の不変量や，閉曲面の写像類群の射影表現などの構成において非常に重要である [BK01, KL01]．しかしモジュラーテンソル圏の例を与えることは一般には難しい．よく知られているモジュラーテンソル圏の例としては，有限群の表現圏の Drinfeld center や，良いクラスの頂点作用素代数の表現圏などがある．また単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に付随する 1 の冪根 q における量子群 $u_q(\mathfrak{g})$ の表現圏 $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{g}))$ を "半単純化" することで半単純なモジュラーテンソル圏が得られる [BK01]．さらにパラメータ q の位数に関する適当な条件のもとで，$\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{g}))$ 自体が非半単純なモジュラーテンソル圏になることも知られている [Lyu95]．

さて，テンソル圏において通常の環論におけるそれを一般化する形で単純代数が定義される．最近のモジュラーテンソル圏の研究において，Shimizu-Yadav は次の定理を示した：

定理 1.1 ([SY24])**.** $\mathcal{C}$ をモジュラーテンソル圏，A を $\mathcal{C}$ における単純，可換かつ haploid な対称フロベニウス代数とする．このとき局所加群の圏 $\mathcal{C}_A^{\mathrm{loc}}$ はモジュラーテンソル圏である．

定理に現れる各言葉の定義は [SY24] を参照されたい．この定理からもわかるように単純代数は，テンソル圏やモジュラーテンソル圏の研究において重要な役割を果たす．

本講演では，清水健一氏 (芝浦工業大学) との共同研究 [SS24] に基づき，q が 1 の奇数乗根の場合の量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現圏 $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の構成例について説明する．Skryabin[Skr07] の結果から，$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数は $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ の単純代数になる．

* E-mail : rsugitani@math.tsukuba.ac.jp. 本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2124 の支援を受けたものである．

$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数の分類に関する結果は第 20 回数学総合若手研究集会でも紹介しているが，今回の講演では，それらの生成元と関係式を完全に決定したことを報告する．さらにこの結果を用いて構成される，$\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の具体例についても紹介する．

2 準備

2.1 記号と用語

基礎体 $\Bbbk$ を標数 0 の代数閉体とする．本稿では特に注意しない限り線形空間などはすべて $\Bbbk$ 上で考え，$\otimes_{\Bbbk}$ を $\otimes$ と表す．また $m \in \mathbb{Z}$ に対し，$q \in \Bbbk^{\times} \setminus \{1\}$ のとき $(m)_q := (1-q^m)/(1-q)$，$q=1$ のとき $(m)_q := m$ と定める．さらに $(0)_q! := 1$，$n \in \mathbb{N}$ に対し $(n)_q! := (1)_q(2)_q \cdots (n)_q$ とする．

ホップ代数 H が与えられたとき，H の余積と余単位をそれぞれ Δ と ε で表し，余積に関して $\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ $(h \in H)$ のように書くことにする (Sweedler 記法)．また H の双対ホップ代数を H^* と表す．その他のホップ代数に関する記号は基本的に [Kas95] の通りとする．またホップ代数に関する基本的なことは例えば [Kas95] や [Mon93] を参照されたい．

定義 2.1. ホップ代数 H の**右余イデアル部分代数** A とは $\Delta(A) \subset A \otimes H$ を満たす H の部分代数である．左余イデアル部分代数も同様に定義されるが，本稿では特に注意しない限り余イデアル部分代数といえば右余イデアル部分代数のことを指すこととする．

2.2 モノイダル圏における単純代数

この節ではモノイダル圏とそれにおける単純代数の概念を簡単に説明する．詳しくは [EGNO15] を参照されたい．

圏 $\mathcal{C}$ に対し，関手 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，対象 $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ および自然同型

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z), \quad l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X, \quad r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X \quad (X, Y, Z \in \mathcal{C})$$

が与えられているとする．自然同型 a, l, r が三角形公理および五角形公理を満たすとき $\mathcal{C}$ を**モノイダル圏**といい，関手 $\otimes$ を**テンソル積関手**，対象 $\mathbf{1}$ を**単位対象**という．Mac Lane のコヒーレンス定理により，a, l, r は恒等射であると仮定してよい．そこで以下，常に a, l, r は恒等射であると仮定する．

ある有限次元代数の有限次元表現の圏と同値となる線形アーベル圏を**有限アーベル圏**という．rigid なモノイダル圏（定義は [EGNO15, §2.10] を見よ）が，テンソル積関手が双線形，単位対象が単純対象，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \cong \Bbbk$ であって有限アーベル圏でもあるとき，この圏を**有限テンソル圏**という．

$\mathcal{C}$ をモノイダル圏とし，A を $\mathcal{C}$ の対象，$\mu : A \otimes A \to A$ および $\eta : \mathbf{1} \to A$ を $\mathcal{C}$ の射とする．図式

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{id}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes \mathbf{1} \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\eta"'] \arrow[dl, bend left, "\mathrm{id}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

が可換であるとき，A を $\mathcal{C}$ **における代数**という．

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ における代数 A が与えられたとする．対象 $M \in \mathcal{C}$ と射 $a_M : M \otimes A \to M$ が図式

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes A \arrow[r, "a_M \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu"'] & M \otimes A \arrow[d, "a_M"] \\ M \otimes A \arrow[r, "a_M"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes A \arrow[d, "a_M"'] & M \otimes \mathbf{1} \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\eta"'] \arrow[dl, bend left, "\mathrm{id}"] \\ M & \end{tikzcd}$$

を可換にするとき，M を $\mathcal{C}$ **における右** A**-加群**といい a_M を**作用**という．さらに $\mathcal{C}$ の射であって A の作用と整合性を保つような A-加群の射が定義され，これを用いて右 A-加群の圏 $\mathcal{C}_A$ が定義される．同様にして左 A-加群の圏 ${}_A\mathcal{C}$ 及び A-双加群の圏 ${}_A\mathcal{C}_A$ が定義される．$\mathcal{C}$ における代数 A が ${}_A\mathcal{C}_A$ において単純対象であるとき，A を**単純代数**という．

有限次元ホップ代数 H に対し $\mathrm{Rep}(H)$ を有限次元左 H-加群の圏とし，$\mathfrak{M}_H, \mathfrak{M}^H$ をそれぞれ有限次元の右 H-加群，右 H-余加群の圏とする．これらはすべて有限テンソル圏になる．また H の余イデアル部分代数 A は $\mathfrak{M}^H$ における代数となることに注意せよ．相対ホップ加群の圏 $\mathfrak{M}^H_A$ は $\mathcal{C} = \mathfrak{M}^H$ としたときの $\mathcal{C}_A$ として定義される [Tak79]．本稿の目的である，余イデアル部分代数を用いた $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の構成において重要なのが Skryabin による次の結果である．

定理 2.2 ([Skr07, Theorem6.1])**.** H を有限次元ホップ代数，A を H の右余イデアル部分代数とする．このとき A は $\mathfrak{M}^H_A$ における単純対象である．

この定理から H の右余イデアル部分代数 A は $\mathfrak{M}^H$ の単純代数であることがわかる．$\mathfrak{M}^H$ は $\mathrm{Rep}(H^*)$ と同一視できるから，A は $\mathrm{Rep}(H^*)$ における単純代数となっているのである．

3 有限次元ホップ代数の余イデアル部分代数について

本節では有限次元ホップ代数の余イデアル部分代数について，本稿で用いる事実を紹介する．

3.1 双対ホップ代数の余イデアル部分代数

有限次元ホップ代数 H のすべての右余イデアル部分代数の集合を $\mathcal{C}(H)$ と書くことにする．$A \in \mathcal{C}(H)$ に対し $A^+ := A \cap \mathrm{Ker}\,(\varepsilon)$ とおく．H/A^+H は H の商余代数として左 H-加群余代数になっており，その双対空間 $(H/A^+H)^*$ は右 H^*-余加群代数，つまり H^* の右余イデアル部分代数とみなせる．この $(H/A^+H)^*$ について次が知られている：

定理 3.1 ([Mas92, Proposition 2.10], [Skr07, Corollary 6.5])**.** 記号は上記の通りとする．対応 $A \mapsto (H/A^+H)^*$ は，$\mathcal{C}(H)$ と $\mathcal{C}(H^*)$ の間の全単射を定める．

さて L を有限次元ホップ代数とし，非退化なホップペアリング $(-,-) : L \times H \to \Bbbk$ が与えられたとする．このときホップ代数としての同型 $\phi : L \to H^*$ が $\phi(\ell)(h) = (\ell, h)$ $(\ell \in L, h \in H)$ によって誘導される．この ϕ と対応 $A \mapsto (H/A^+H)^*$ を組合わせて得られる写像

$$\mathcal{C}(H) \to \mathcal{C}(L), \quad A \mapsto \phi^{-1}((H/A^+H)^*) =: A^\dagger \tag{3.1}$$

は全単射である．Skryabin[Skr07, Theorem 6.1] の結果を用いれば，この $A^\dagger$ の次元は

$$\dim(A)\cdot\dim(A^\dagger)=\dim(H) \tag{3.2}$$

によって与えられる．また L に右 H-作用 $\ell \leftharpoonup h=(\ell_{(1)},h)\ell_{(2)}$ が定まるが，この作用を用いて $A^\dagger$ は次のように表される：

$$A^\dagger=\{\ell\in L\mid \ell\leftharpoonup a=\varepsilon(a)\ell \ \text{ for all } a\in A\} \quad (A\in\mathcal{C}(H)). \tag{3.3}$$

3.2 余イデアル部分代数の積分

H を有限次元ホップ代数，A を H の余イデアル部分代数とする．A の要素 Λ が任意の $a\in A$ に対し $\Lambda a=\varepsilon(a)\Lambda$ を満たすとき，Λ を A の**右積分**という．Skryabin の結果 [Skr07, Corollary 6.5] から A はフロベニウス代数であるため，A はスカラー倍を除いて一意的な 0 でない右積分を常にもつ．

補題 3.2. 3.1 節の記号を引き続き用いる．$A\in\mathcal{C}(H)$ に対して対応 (3.1) の L の余イデアル部分代数 $A^\dagger$ について，A の 0 でない右積分 Λ を用いて $A^\dagger=L\leftharpoonup\Lambda$ が成り立つ．

証明. H の L への作用は $\phi: L\to H^*$ が右 H-加群の同型になるように定められる．また H は有限次元ホップ代数であるからフロベニウス代数でもあり，つまり H^* は右 H-加群として H と同型である．一方で [Skr07, Theorem 6.1] より H は自由 A-加群である．以上の議論を組み合わせると L が自由 A-加群であることがわかる．

さて，右 A-加群 M に対して $I(M)=\{m\in M\mid ma=\varepsilon(a)m \text{ for all } a\in A\}$ と表すことにする．A の 0 でない右積分はスカラー倍を除いて一意的であることから $I(A)=\Bbbk\Lambda=A\Lambda$ が成り立つ．今，L は A 上自由であったから $I(L)=L\Lambda$，つまり本補題の主張を得る．証明が完了した． □

4 量子 SL_2 とその余イデアル部分代数

$N>1$ を奇数とし，q を 1 の原始 N 乗根とする．本節ではまず小さな量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ と量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ について説明する．特に $u_q(\mathfrak{sl}_2)$-加群としての $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ について調べ，またパラメータ q を q^{-1} に取りかえた $u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ と $\overline{\mathcal{O}}_{q^{-1}}(SL_2)$ についても説明する．そして量子 SL_2 の余イデアル部分代数の分類結果を紹介する．

4.1 小さな量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ と量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$

小さな量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ とは，E,F,K で生成され，

$$E^N=F^N=0,\quad K^N=1,\quad KE=q^2EK,\quad KF=q^{-2}FK,\quad EF-FE=\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}},$$
$$\Delta(K)=K\otimes K,\quad \Delta(E)=E\otimes K+1\otimes E,\quad \Delta(F)=F\otimes 1+K^{-1}\otimes F,$$
$$\varepsilon(K)=1,\quad \varepsilon(E)=\varepsilon(F)=0$$

を満たすホップ代数である．なお本稿では計算を簡潔にするため，$\tilde{F} = (q - q^{-1})KF$ とおき $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の生成元として $E, \tilde{F}, K$ を用いることがある．

量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ とは，a, b, c, d で生成され

$$a^N = d^N = ad - q^{-1}bc = da - qbc = 1, \quad b^N = c^N = 0,$$
$$ba = qab, \quad ca = qac, \quad db = qbd, \quad dc = qcd, \quad bc = cb,$$
$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c, \quad \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d, \quad \Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, \quad \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d,$$
$$\varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1, \quad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0.$$

を満たすホップ代数である．

よく知られている事実として $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ と $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ はお互いに双対ホップ代数である．実際，$u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の各生成元に対し

$$\rho(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(K) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

で与えられる 2 次表現 ρ を用いて，非退化なホップペアリング $(-,-) : \overline{\mathcal{O}}_q(SL_2) \times u_q(\mathfrak{sl}_2) \to \Bbbk$ が

$$\begin{pmatrix} (a,h) & (b,h) \\ (c,h) & (d,h) \end{pmatrix} = \rho(h) \quad (h \in u_q(\mathfrak{sl}_2)) \tag{4.1}$$

により決定される．詳しくは [Cli19, Appendix A] を見よ．

4.2 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の基底と $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ による作用

$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の定義において，d は可逆元で $a = \left(q^{-1}bc + a\right) d^{-1}$ が成り立つ．よって

$$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2) = \left\langle b, c, d \;\middle|\; d^N = 1,\ b^N = c^N = 0,\ db = qbd,\ dc = qcd,\ bc = cb \right\rangle$$

と表すことができ，このとき

$$\left\{ b^i c^j d^k \;\middle|\; i, j, k = 0, 1, \cdots, N-1 \right\} \tag{4.2}$$

が $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の基底となる．次に $x = bd^{-1},\ y = cd,\ z = d^2$ とおく．容易にわかるように

$$\left\{ x^i y^j z^k \;\middle|\; i, j, k = 0, 1, \cdots, N-1 \right\} \tag{4.3}$$

も $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の基底である．直接的な計算から $x^i y^j z^k = q^{-\frac{1}{2}i(i-1) + \frac{1}{2}j(j-1) - ij} b^i c^j d^{-i+j+2k}$ を得る．

さて，$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の各生成元への $h \in u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の作用はホップペアリング (4.1) を用いて

$$\begin{pmatrix} a \leftharpoonup h & b \leftharpoonup h \\ c \leftharpoonup h & d \leftharpoonup h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a,h)a + (b,h)c & (a,h)b + (b,h)d \\ (c,h)a + (d,h)c & (c,h)b + (d,h)d \end{pmatrix} = \rho(h) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となる．特に $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の各生成元の右作用は

$$\begin{array}{llll} a \leftharpoonup E = c, & b \leftharpoonup E = d, & c \leftharpoonup E = 0, & d \leftharpoonup E = 0, \\ a \leftharpoonup F = 0, & b \leftharpoonup F = 0, & c \leftharpoonup F = a, & d \leftharpoonup F = b, \\ a \leftharpoonup K = qa, & b \leftharpoonup K = qb, & c \leftharpoonup K = q^{-1}c, & d \leftharpoonup K = q^{-1}d \end{array}$$

である．これらを用いて基底 (4.3) への E, F, K の作用が得られる：

補題 4.1. それぞれ $i,j,k=0,1,\cdots,N-1$ に対して次が成り立つ：

$$x^iy^jz^k \leftharpoonup E = q^{-2(j+k)+1}(i)_{q^2}x^{i-1}y^jz^k,$$
$$x^iy^jz^k \leftharpoonup F = (-i+2j+2k)_{q^2}x^{i+1}y^jz^k + q^{-2i}(j)_{q^2}x^iy^{j-1}z^k,$$
$$x^iy^jz^k \leftharpoonup K = q^{2(i-j-k)}x^iy^jz^k.$$

この補題 4.1 によって各 $k=0,1,\cdots,N-1$ に対し

$$V_k := \mathrm{span}\{x^iy^jz^k \mid i,j=0,1,\cdots,N-1\} \tag{4.4}$$

は $u_q(\mathfrak{sl}_2)$-加群として $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の部分加群になることがわかる．

4.3 $u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ と $\overline{\mathcal{O}}_{q^{-1}}(SL_2)$

ホップ代数 $u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ の各生成元 E,F,K をそれぞれ $\sigma(E)=KF$, $\sigma(F)=EK^{-1}$, $\sigma(K)=K$ と対応させるとき，σ はホップ代数としての一意的な同型 $\sigma : u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2) \to u_q(\mathfrak{sl}_2)$ になる [KS97]．また同様に $\breve{\sigma}(a)=d$, $\breve{\sigma}(b)=qc$, $\breve{\sigma}(c)=q^{-1}b$, $\breve{\sigma}(d)=a$ と対応させることで $\breve{\sigma} : \overline{\mathcal{O}}_q(SL_2) \to \overline{\mathcal{O}}_{q^{-1}}(SL_2)$ もホップ代数の同型になる．この節では $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ と $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ のホップペアリングを，q を明記して $(-,-)_q$ と表すことにする．それぞれの各生成元に対して直接的に計算することにより，任意の $h \in u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ と $f \in \overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ に対して $(f,\sigma(h))_q = (\breve{\sigma}(f),h)_{q^{-1}}$ が成り立つことがわかる．これを用いれば次の補題が従う．

補題 4.2. $u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数 A に対して，$\sigma(A)^\dagger = \breve{\sigma}(A^\dagger)$ が成り立つ．

証明. 任意の $f \in \overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ と $h \in u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ に対して

$$\breve{\sigma}(f) \leftharpoonup h = (\breve{\sigma}(f_{(1)}),h)_{q^{-1}}\breve{\sigma}(f_{(2)}) = (f_{(1)},\sigma(h))_q\,\breve{\sigma}(f_{(2)}) = \breve{\sigma}(f \leftharpoonup \sigma(h))$$

が成り立つ．この等式と (3.3) から本補題の主張を得る． □

4.4 量子 SL_2 の余イデアル部分代数

まず小さな量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数について次が成り立つ．

命題 4.3 ([SS24])**.** 1 の奇数乗根 q における $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数は以下ですべてである：

$$u_q(\mathfrak{sl}_2),\quad \langle K^r\rangle,\quad \langle E,K^r\rangle,\quad \langle \tilde{F},K^r\rangle \quad (r\in\mathbb{Z} \text{ は } N \text{ の正の約数}),$$
$$\langle E+\alpha\tilde{F}+\beta K\rangle \quad (\alpha,\beta\in\Bbbk,(\alpha,\beta)\neq(0,0)),\quad \langle \tilde{F}+\beta K\rangle \quad (\beta\in\Bbbk,\beta\neq 0),$$
$$\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle \quad \left(\lambda,\mu\in\Bbbk \text{ s.t. } \lambda\mu\left(1-q^2\right)=1\right).$$

さらにこれらの次元はそれぞれ次のようになる：

$$\dim\langle K^r\rangle = N/r,\quad \dim\langle E,K^r\rangle = \dim\langle \tilde{F},K^r\rangle = N^2/r,$$
$$\dim\langle E+\alpha\tilde{F}+\beta K\rangle = \dim\langle \tilde{F}+\beta K\rangle = N,\quad \dim\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle = N^2.$$

5.1 節のために $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数について，2 つの補題を準備しておこう．

補題 4.4. $\alpha, \beta \in \Bbbk$ を固定し $p_{\alpha,\beta} = E + \alpha\tilde{F} + \beta K$ とおく．多項式 $\psi(X)$ を次のように定める：$\psi(X) := \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left(X^2 - \beta(q^{2k} + q^{-2k})X + \beta^2 + (q^{2k} - q^{-2k})^2/(1-q^2)\alpha\right)$．このとき，多項式 $(X-\beta)\psi(X)$ は $p_{\alpha,\beta}$ の最小多項式であり，$\Lambda_{\alpha,\beta} := \psi(p_{\alpha,\beta})$ は $\langle p_{\alpha,\beta}\rangle$ の 0 でない右積分になる．

補題 4.5. 余イデアル部分代数 $\langle E+\lambda K, \tilde{F}+\mu K\rangle$ の生成元を $g_\lambda = \lambda^{-1}(E+\lambda K), h_\mu = \mu^{-1}(\tilde{F}+\mu K)$ ととり，$\langle E+\lambda K, \tilde{F}+\mu K\rangle = \langle g_\lambda, h_\mu\rangle =: B_{\lambda,\mu}$ とする．このとき $\Lambda_{\lambda,\mu} := \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} {g_\lambda}^i {h_\mu}^j$ は $B_{\lambda,\mu}$ の 0 でない右積分である．

命題 4.3 で与えた余イデアル部分代数に定理 3.1 を適用することで，量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数の完全なリストが得られる．さらに (3.2) を用いることでそれらの次元もわかる．

命題 4.6. 1 の奇数乗根 q における $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数は以下ですべてである：

$$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2),\quad \langle K^r\rangle^\dagger,\quad \langle E, K^r\rangle^\dagger,\quad \langle \tilde{F}, K^r\rangle^\dagger \ \ (r \in \mathbb{Z} \text{ は } N \text{ の正の約数}),$$
$$\langle E + \alpha\tilde{F} + \beta K\rangle^\dagger \quad (\alpha, \beta \in \Bbbk, (\alpha,\beta) \neq (0,0)),\quad \langle \tilde{F} + \beta K\rangle^\dagger \quad (\beta \in \Bbbk, \beta \neq 0),$$
$$\langle E + \lambda K, \tilde{F} + \mu K\rangle^\dagger \quad \left(\lambda, \mu \in \Bbbk \text{ s.t. } \lambda\mu\left(1-q^2\right) = 1\right).$$

これらの次元はそれぞれ次のようになる：

$$\dim\langle K^r\rangle^\dagger = rN^2,\quad \dim\langle E, K^r\rangle^\dagger = \dim\langle \tilde{F}, K^r\rangle^\dagger = rN,$$
$$\dim\langle E + \alpha\tilde{F} + \beta K\rangle^\dagger = \dim\langle \tilde{F} + \beta K\rangle^\dagger = N^2,\quad \dim\langle E + \lambda K, \tilde{F} + \mu K\rangle^\dagger = N.$$

5 主結果

5.1 量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数の生成元

本節も $N > 1$ を奇数とし，q を 1 の原始 N 乗根とする．

定理 5.1 ([SS24])**.** 命題 4.6 で与えた $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の各余イデアル部分代数の生成元は次のようになる：

$$\langle K^r\rangle^\dagger = \langle a^{N/r}, a^{-1}b, ac\rangle = \langle d^{N/r}, bd, cd^{-1}\rangle,\quad \langle E, K^r\rangle^\dagger = \langle d^{N/r}, cd^{-1}\rangle,\quad \langle \tilde{F}, K^r\rangle^\dagger = \langle a^{N/r}, a^{-1}b\rangle,$$
$$\langle E + \alpha K\rangle^\dagger = \langle cd^{-1}, d^2 + (q-q^{-1})\alpha bd\rangle,\quad \langle \tilde{F} + \beta K\rangle^\dagger = \langle a^{-1}b, a^2 - q^2\beta ac\rangle \quad (\alpha, \beta \in \Bbbk)$$
$$\langle E + \alpha\tilde{F} + \beta K\rangle^\dagger = \langle y_{\alpha,\beta}, z_{\alpha,\beta}\rangle \quad (\alpha, \beta \in \Bbbk, (\alpha,\beta) \neq (0,0)),$$
$$\langle E + \lambda K, \tilde{F} + \mu K\rangle^\dagger = \langle w_{\lambda,\mu}\rangle \quad \left(\lambda, \mu \in \Bbbk \text{ s.t. } \lambda\mu\left(1-q^2\right) = 1\right).$$

但し $y_{\alpha,\beta}, z_{\alpha,\beta}, w_{\lambda,\mu}$ はそれぞれ，補題 4.4 と補題 4.5 の右積分 $\Lambda_{\alpha,\beta}$, $\Lambda_{\lambda,\mu}$ を用いて

$$y_{\alpha,\beta} := \frac{q^{-1}}{(N-1)_{q^2}!}\left(x^{N-1}y \leftharpoonup \Lambda_{\alpha,\beta}\right),\quad z_{\alpha,\beta} := \frac{q^{-1}}{(N-1)_{q^2}!}\left(x^{N-1}z \leftharpoonup \Lambda_{\alpha,\beta}\right),$$
$$w_{\lambda,\mu} := x^{N-1}y^{N-1}z \leftharpoonup \Lambda_{\lambda,\mu}$$

とする．

証明の概略. まず $\langle K^r\rangle^\dagger$, $\langle E, K^r\rangle^\dagger$, $\langle E+\alpha K\rangle^\dagger$ について，(3.3) と補題 4.1 より '$\supset$' がわかる．一方，命題 4.6 で与えたそれぞれの次元と比較することにより '$\subset$' を得る．さらにこれらに対し補題 4.2 を用いることにより，$\langle \tilde{F}, K^r\rangle^\dagger$ と $\langle \tilde{F} + \beta K\rangle^\dagger$ の生成元も得られる．

次に $\langle E+\alpha\tilde{F}+\beta K\rangle^{\dagger}$ について，補題 4.1 を用いれば $y_{\alpha,\beta}$ と $z_{\alpha,\beta}$ が 0 でないことがわかる．この事実と補題 3.2 より '$\supset$' を得る．また次元を比較することで '$\subset$' も得られる．

最後に $A:=\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle^{\dagger}$ を考える．まず $\langle -\rangle^{\dagger}$ の定義 (3.1) に基づいて直接計算すると代数として $A\cong \Bbbk^N$ となることがわかる．一方で $w_{\lambda,\mu}$ は，(4.4) の $u_q(\mathfrak{sl}_2)$-加群 V_1 に含まれ，0 でない元であることが示される．これらの事実と補題 3.2 に考慮すれば，$\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle^{\dagger}$ は $w_{\lambda,\mu}$ によって生成されることがわかる． □

m を正の整数，n を m の約数，ξ を 1 の原始 n 乗根とする．代数 $T_{m,n}(\xi)$ を $\mathtt{g}^n=1$, $\mathtt{x}^m=0$, $\mathtt{gx}=\xi\mathtt{xg}$ を満たす $\mathtt{g},\mathtt{x}$ で生成される代数とする．

定理 5.2 ([SS24])**.** 量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の各余イデアル部分代数の代数構造は次のようになる：

(1) 余イデアル部分代数 $\langle K^r\rangle^{\dagger}$ の生成元 $s:=bd$, $t:=cd^{-1}$, $p=d^{N/r}$ は次の関係式を満たす：

$$s^N=t^N=0,\quad p^r=1,\quad ts=q^{-2}st,\quad ps=q^{N/r}sp,\quad pt=q^{N/r}tp. \tag{5.1}$$

(2) それぞれ次のような，代数としての同型が存在する：

$$\begin{aligned}
&T_{N,r}\left(q^{N/r}\right)\to\langle E,K^r\rangle^{\dagger},\quad \mathtt{g}\mapsto d^{N/r},\quad \mathtt{x}\mapsto cd^{-1}.\\
&T_{N,r}\left(q^{-N/r}\right)\to\langle \tilde{F},K^r\rangle^{\dagger},\quad \mathtt{g}\mapsto a^{N/r},\quad \mathtt{x}\mapsto a^{-1}b.\\
&T_{N,N}\left(q^{-2}\right)\to\langle E+\alpha K\rangle^{\dagger},\quad \mathtt{g}\mapsto d^2+\left(q-q^{-1}\right)\alpha bd,\quad \mathtt{x}\mapsto cd^{-1}.\\
&T_{N,N}\left(q^{2}\right)\to\langle \tilde{F}+\beta K\rangle^{\dagger},\quad \mathtt{g}\mapsto a^2-q^2\beta ac,\quad \mathtt{x}\mapsto a^{-1}b.\\
&T_{N,N}(q^{-2})\to\langle E+\alpha\tilde{F}+\beta K\rangle^{\dagger},\quad \mathtt{g}\mapsto z_{\alpha,\beta},\quad \mathtt{x}\mapsto y_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

(3) 余イデアル部分代数 $\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle^{\dagger}=\langle w_{\lambda,\mu}\rangle$ は，代数として $\Bbbk^N$ と同型である．

但し $y_{\alpha,\beta},z_{\alpha,\beta},w_{\lambda,\mu}$ は定理 5.1 の通りである．

注意 5.3. 余イデアル部分代数 $\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle^{\dagger}$ の生成元 $w_{\lambda,\mu}$ の最小多項式については例 5.6 で解説する．

5.2 $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の例

2.2 節の議論から $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数は，$h\in u_q(\mathfrak{sl}_2)$, $f\in\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ のとき左作用 $h\rightharpoonup f=f_{(1)}(f_{(2)},h)$ によって $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数となる．$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の各生成元への $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の左作用は

$$\begin{array}{llll}
E\rightharpoonup a=0, & E\rightharpoonup b=a, & E\rightharpoonup c=0, & E\rightharpoonup d=c,\\
F\rightharpoonup a=b, & F\rightharpoonup b=0, & F\rightharpoonup c=d, & F\rightharpoonup d=0,\\
K\rightharpoonup a=qa, & K\rightharpoonup b=q^{-1}b, & K\rightharpoonup c=qc, & K\rightharpoonup d=q^{-1}d
\end{array}$$

である．また基底 (4.2) への作用はそれぞれ次のようになる：

$$E \rightharpoonup b^i c^j d^k = q^{-2i-k+1}(i+k)_{q^2} b^i c^{j+1} d^{k-1} + q^{-2i-k+2}(i)_{q^2} b^{i-1} c^j d^{k-1} \tag{5.2}$$

$$F \rightharpoonup b^i c^j d^k = q^{i-j+1}(j)_{q^2} b^i c^{j-1} d^{k+1}, \tag{5.3}$$

$$K \rightharpoonup b^i c^j d^k = q^{-i+j-k} b^i c^j d^k \tag{5.4}$$

例 5.4. 整数 r を N の正の約数とする．定理 5.1 と定理 5.2 より，$\langle K^r \rangle^\dagger$ は関係式 (5.1) を満たす $s := bd$, $t := cd^{-1}$, $p := d^{N/r}$ によって生成される，$\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数である．(5.2)–(5.4) から，生成元 s, t, p への E, F, K の左作用はそれぞれ次のようになる：

$$\begin{aligned}
&E \rightharpoonup s = q^{-2}(q+q^{-1})st + q^{-1}, && F \rightharpoonup s = 0, && K \rightharpoonup s = q^{-2}s,\\
&E \rightharpoonup t = -qt^2, && F \rightharpoonup t = 1, && K \rightharpoonup t = q^2 t,\\
&E \rightharpoonup p = q^{-N/r+1}(N/r)_{q^2} tp, && F \rightharpoonup p = 0, && K \rightharpoonup p = q^{-N/r}p.
\end{aligned}$$

例 5.5. 定理 5.1 と定理 5.2 より，$\langle E + \alpha K \rangle^\dagger$ ($\alpha \in \Bbbk$) は関係式 $t^N = 0$, $v^N = 1$, $vt = q^2 tv$ を満たす $t := cd^{-1}$ と $v := d^2 + (q - q^{-1})\alpha bd$ によって生成される，$\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数である．まず生成元 t への E, F, K の作用は例 5.4 と同じである．また (5.2)–(5.4) から，生成元 v への E, F, K の作用はそれぞれ次のようになる：

$$E \rightharpoonup v = (q+q^{-1})tv + \alpha(1-q^{-2}), \quad F \rightharpoonup v = 0, \quad K \rightharpoonup v = q^{-2}v.$$

例 5.6. 定理 5.1 と定理 5.2 より，$\lambda\mu\left(1-q^2\right) = 1$ を満たす $\lambda, \mu \in \Bbbk$ に対し $A = \langle E + \lambda K, \tilde{F} + \mu K \rangle^\dagger$ は，$w := w_{\lambda,\mu} = h \leftharpoonup \Lambda$ によって生成される，$\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数である．但し $h = x^{N-1}y^{N-1}z = q^{-1}b^{N-1}c^{N-1}d^2$ とし，$\Lambda := \Lambda_{\lambda,\mu}$ は補題 4.5 で与えた A の右積分とする．A の生成元 w の最小多項式および E, F, K の w への左作用を決定しよう．V_k を (4.4) における $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の $u_q(\mathfrak{sl}_2)$-部分加群とする．このとき $A \cap V_k$ は 1 次元で，$0 \neq w^k \in A \cap V_k$ となることが示せる．

まず w の最小多項式について，$w^N \neq 0$ と $w^N \in A \cap V_0 = \Bbbk 1_A$ より，ある $c \in \Bbbk^\times$ が存在して $w^N = c$ となる．さらにこの定数 c について

$$c = \varepsilon(c) = \varepsilon(w^N) = \varepsilon(w)^N = (h_{(1)}, \Lambda)\varepsilon(h_{(2)}) = (h, \Lambda)^N$$

が成り立つ．従って w の最小多項式は $\psi(X) = X^N - (h, \Lambda)^N$ である．

次に K の左作用は (5.4) から $K \rightharpoonup w = q^{-2}w$ となる．E と F の作用について，$w \in V_1$ に注意して (5.2) と (5.3) を用いれば

$$E \rightharpoonup w = (\mathrm{const.}) \cdot x^{N-2}y^{N-1} \in A \cap V_0, \quad F \rightharpoonup w = (\mathrm{const.}) \cdot x^{N-1}y^{N-2}z^2 \leftharpoonup \Lambda \in A \cap V_2$$

を得る．これよりある $\delta, \delta' \in \Bbbk$ を用いて $E \rightharpoonup w = \delta$, $F \rightharpoonup w = \delta' w^2$ となることがわかる．さらに

$$\delta = \varepsilon(E \rightharpoonup w) = \varepsilon(E \rightharpoonup h \leftharpoonup \Lambda) = (h_{(1)}, \Lambda)\varepsilon(h_{(2)})(h_{(3)}, E) = (h, \Lambda E)$$

より $\delta = (h, \Lambda E)$ を得る．また [MS01, Theorem 3.1] から δ は可逆で，$\delta' = -q\delta^{-1}$ が従う．以上の議論をまとめると，A の生成元 w への E, F, K の作用は，$\delta = (h, \Lambda E)$ として

$$K \rightharpoonup w = q^{-2}w, \quad E \rightharpoonup w = \delta, \quad F \rightharpoonup w = -q\delta^{-1}w^2$$

となる．

参考文献

[BK01] B. Bakalov and A. Kirillov, Jr. *Lectures on tensor categories and modular functors*, volume 21 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Cli19] Z. Cline. On actions of Drinfel'd doubles on finite dimensional algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 223(8):3635–3664, 2019.

[EGNO15] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik. *Tensor categories*, volume 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[Kas95] C. Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[KL01] T. Kerler and V. Lyubashenko. *Non-semisimple topological quantum field theories for 3-manifolds with corners*, volume 1765 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[KS97] A. Klimyk and K. Schmüdgen. *Quantum groups and their representations*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[Lyu95] V. Lyubashenko. Invariants of 3-manifolds and projective representations of mapping class groups via quantum groups at roots of unity. *Comm. Math. Phys.*, 172(3):467–516, 1995.

[Mas92] A. Masuoka. Freeness of Hopf algebras over coideal subalgebras, *Comm. Algebra* 20 (1992), no. 5, 1353–1373.

[Mon93] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1993.

[MS01] S. Montgomery and H.-J. Schneider. Skew derivations of finite-dimensional algebras and actions of the double of the Taft Hopf algebra. *Tsukuba J. Math.*, 25(2):337–358, 2001.

[SS24] K. Shimizu, R. Sugitani, Coideal subalgebras of quantum SL2 at roots of unity. *arXiv e-prints*, arXiv:2410.10064, October 2024.

[SY24] K. Shimizu and H. Yadav. Commutative exact algebras and modular tensor categories. *arXiv e-prints*, arXiv:2408.06314, August 2024.

[Skr07] S. Skryabin. Projectivity and freeness over comodule algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 359 (2007), no. 6, 2597–2623.

[Tak79] M. Takeuchi. Relative Hopf modules—equivalences and freeness criteria. *J. Algebra*, 60(2):452–471, 1979.